# Лекция

**Интегральные уравнения Вольтерра первого рода.**

, (1)

Если , то левая часть уравнения определяет дифференцируемую функцию ( по теореме об интеграле с переменным верхним пределом интегрирования). Следовательно, можно говорить о существовании решения лишь в том, случае, когда не только непрерывна на , но и имеет производную первого порядка и .

**Теорема.** Если и имеют непрерывные производные и , , на , то уравнение (1) имеет на единственное непрерывное решение .

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет решение , тогда

, .

Найдем производные левой и правой части.

(2)

или

, .

Уравнение (2) – уравнение Вольтерра второго рода, оно имеет единственное решение, а следовательно, уравнение (1) тоже имеет единственное решение.

**Замечание 1.** Из доказательства теоремы вытекает, что при определенных условиях, решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода может быть сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

**Замечание 2.** Если , то уравнение (2) является опять уравнением первого рода, с которым можно поступать так же, как с первоначальным, если имеет непрерывную производную , ,

непрерывна на . В результате получим уравнение

,

которое является уравнением второго рода, если . Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к производной , которая при не обращается в ноль. При этом, чтобы уравнение (1) имело решение , необходимо, чтобы , причем

, . В этом случае придем к уравнению второго рода

.

**Замечание 3.** Уравнение (1) в случае может быть сведено к уравнению второго рода с помощью интегрирования по частям. Обозначим , тогда

и уравнение (1) примет вид

.

**Пример 1.**

,

, ,

,

,

,

, .

.

**Пример 2.**

, ,

,

,

,

.